

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
11.02.2023

CLASA a V -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Restul obținut prin împărțirea numărului natural x la 30 este 8, iar restul obținut prin împărțirea numărului natural y la 35 este 34. Aflați restul împărțirii numărului $3 \cdot x + 2 \cdot y$ la 10.

Soluție:

Conform teoremei împărțirii cu rest avem c_1, c_2 numere naturale pentru care $x = 30 \cdot c_1 + 8$, (1) și $y = 35 \cdot c_2 + 34$, (2). Înmulțind egalitatea (1) cu 3 și egalitatea (2) cu 2 obținem

$$3 \cdot x = 90 \cdot c_1 + 24,$$

$$2 \cdot y = 70 \cdot c_2 + 68.$$

Adunând membru cu membru cele două egalități obținute avem

$$3 \cdot x + 2 \cdot y = 90 \cdot c_1 + 70 \cdot c_2 + 92 = 90 \cdot c_1 + 70 \cdot c_2 + 90 + 2 = 10 \cdot (9 \cdot c_1 + 7 \cdot c_2 + 9) + 2.$$

Cum $2 < 10$ deducem că restul împărțirii numărului $3 \cdot x + 2 \cdot y$ la 10 este 2.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce $3 \cdot x = 90 \cdot c_1 + 24$	2p
Deduce $2 \cdot y = 70 \cdot c_2 + 68$	2p
Adunând membru cu membru cele două egalități obține $3 \cdot x + 2 \cdot y = 10 \cdot (9 \cdot c_1 + 7 \cdot c_2 + 9) + 2$	2p
Argumentează că restul este 2	1p

2. a) Determinați x din egalitatea:

$$x + [1^5 + (5^3)^{10} : 125 + (5^2)^9 - (5^9)^3 - 125^6] \cdot 2001 = 1 + 2 + 3 + \dots + 2001.$$

b) Festivalul internațional *George Enescu* a fost inițiat în anul \overline{abcd} . Știind că \overline{abcd} are cifra unităților egală cu 8, iar dacă ștergem această cifră numărul se micșorează cu $11011100011_{(2)}$, aflați anul inițierii acestui festival.

Soluție:

a) $x + [1^5 + 5^{30} : 5^3 + 5^{18} - 5^{27} - (5^3)^6] \cdot 2001 = 2001 \cdot (2001 + 1) : 2$

$$x + (1 + 5^{27} + 5^{18} - 5^{27} - 5^{18}) \cdot 2001 = 2001 \cdot 2002 : 2$$

$$x + 1 \cdot 2001 = 2001 \cdot 1001$$

$$x = 2001 \cdot 1001 - 2001$$

$$x = 2001 \cdot (1001 - 1)$$

$$x = 2001000$$

b) $11011100011_{(2)} = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 +$
 $+ 1 \cdot 2 + 1 = 1024 + 512 + 0 + 128 + 64 + 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 1763$

$$\text{Avem } d = 8 \text{ și } \overline{abc8} - \overline{abc} = 1763 \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{abc} + 8 - \overline{abc} = 1763 \Leftrightarrow 9 \cdot \overline{abc} = 1755.$$

Împărțind ultima egalitate la 9 obținem $\overline{abc} = 195$.

Deducem $\overline{abcd} = 1958$, deci festivalul internațional *George Enescu* a fost inițiat în anul 1958.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Deduce $x + (1 + 5^{27} + 5^{18} - 5^{27} - 5^{18}) \cdot 2001 = 2001 \cdot 2002 : 2$	1p
$x = 2001 \cdot 1001 - 2001$	1p
Determină $x = 2001000$	1p
b) Deduce $11011100011_{(2)} = 1763$	1p
$\overline{abc8} - \overline{abc} = 1763 \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{abc} + 8 - \overline{abc} = 1763 \Leftrightarrow 9 \cdot \overline{abc} = 1755$	2p
Deduce $\overline{abcd} = 1958$ și precizează că festivalul internațional <i>George Enescu</i> a fost inițiat în anul 1958	1p

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Presupune că produsul $(a_1 + a_2) \cdot (a_2 + a_3) \cdot (a_3 + a_4) \cdot \dots \cdot (a_{2019} + a_1)$ este un număr natural impar și deduce că sumele $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{2019} + a_1$ sunt numere naturale impare	2p
Argumentează că $2 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2019}) = \text{impar}$, contradicție	2p
Deduce că $(a_1 + a_2) \cdot (a_2 + a_3) \cdot (a_3 + a_4) \cdot \dots \cdot (a_{2019} + a_1)$ este un număr natural nenul par	1p
Obține $u(4^{(a_1+a_2) \cdot (a_2+a_3) \cdot (a_3+a_4) \cdot \dots \cdot (a_{2019}+a_1)} - 1) = 5$	2p

4. Determinați numerele \overline{abcd} care verifică simultan condițiile:

- a) \overline{ab} și \overline{cd} sunt numere pare consecutive;
 b) $(\overline{ab} + \overline{cd}) \cdot 10 = \overline{ab} \cdot (\overline{cd} - 1)$.

Soluție:

Cum \overline{ab} și \overline{cd} sunt numere pare consecutive avem $\overline{ab} > \overline{cd}$ și $\overline{ab} - 2 = \overline{cd}$ sau $\overline{ab} < \overline{cd}$ și $\overline{ab} + 2 = \overline{cd}$.

Cazul 1: $\overline{ab} > \overline{cd}$ și $\overline{ab} - 2 = \overline{cd}$

Înlocuind în condiția de la b) deducem egalitatea $(\overline{ab} + \overline{ab} - 2) \cdot 10 = \overline{ab} \cdot (\overline{ab} - 2 - 1)$.

Folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere ultima egalitate devine:

$$20 \cdot \overline{ab} - 20 = \overline{ab}^2 - 2 \cdot \overline{ab} - \overline{ab} \Leftrightarrow 23 \cdot \overline{ab} - \overline{ab}^2 = 20 \Leftrightarrow \overline{ab} \cdot (23 - \overline{ab}) = 20.$$

Cum $\overline{ab} \geq 10$ și $20 = 10 \cdot 2$ sau $20 = 20 \cdot 1$ deducem că $\overline{ab} = 10$ sau $\overline{ab} = 20$.

- pentru $\overline{ab} = 10$ avem $\overline{ab} \cdot (23 - \overline{ab}) = 10 \cdot (23 - 10) = 10 \cdot 13 = 130 \neq 20$
- pentru $\overline{ab} = 20$ avem $\overline{ab} \cdot (23 - \overline{ab}) = 20 \cdot (23 - 20) = 20 \cdot 3 = 60 \neq 20$

Deducem că ultima egalitate este imposibilă.

Cazul 2: $\overline{ab} < \overline{cd}$ și $\overline{ab} + 2 = \overline{cd}$

Înlocuind în condiția de la b) deducem

$$\begin{aligned} (\overline{ab} + \overline{ab} + 2) \cdot 10 &= \overline{ab} \cdot (\overline{ab} + 2 - 1) \Leftrightarrow 2 \cdot (\overline{ab} + 1) \cdot 10 = \overline{ab} \cdot (\overline{ab} + 1) \\ &\Leftrightarrow 20 \cdot (\overline{ab} + 1) = \overline{ab} \cdot (\overline{ab} + 1). \end{aligned}$$

De unde avem $\overline{ab} = 20$ și $\overline{cd} = 22$, deci $\overline{abcd} = 2022$.

În concluzie, singurul număr \overline{abcd} care verifică simultan condițiile date este 2022.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Identifică cele două cazuri: $\overline{ab} > \overline{cd}$ și $\overline{ab} - 2 = \overline{cd}$ sau $\overline{ab} < \overline{cd}$ și $\overline{ab} + 2 = \overline{cd}$	1 p
Cazul 1: $\overline{ab} > \overline{cd}$ și $\overline{ab} - 2 = \overline{cd}$	
deduce $20 \cdot \overline{ab} - 20 = \overline{ab}^2 - 2 \cdot \overline{ab} - \overline{ab}$	1p
deduce $\overline{ab} \cdot (23 - \overline{ab}) = 20$	1p
argumentează că ultima egalitate este imposibilă	1p
Cazul 2: $\overline{ab} < \overline{cd}$ și $\overline{ab} + 2 = \overline{cd}$	
deduce $20 \cdot (\overline{ab} + 1) = \overline{ab} \cdot (\overline{ab} + 1)$	1p
deduce $\overline{ab} = 20$ și $\overline{cd} = 22$	1p
obține $\overline{abcd} = 2022$	1p

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
11.02.2023**

CLASA a VI -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

1. Barbu și colegii de la cercul de matematică aranjează cărțile din cabinetul de matematică. El observă că, dacă le aranjează câte 6 sau câte 7 sau câte 8 sau câte 9 pe fiecare raft, de fiecare dată, rămân nearanjate, același număr de cărți. Aflați numărul total al cărților știind că acesta are trei cifre și este divizibil cu 11.

Soluție:

Notăm cu n numărul cărților. Folosind Teorema împărțirii cu rest obținem:

$$n = 6 \cdot c_1 + r = 7 \cdot c_2 + r = 8 \cdot c_3 + r = 9 \cdot c_4 + r, \text{ cu } 0 \leq r \leq 5.$$

Rezultă în continuare că $(n - r) : [6, 7, 8, 9] = 504$. Cum n are 3 cifre, rezultă că

$$n \in \{504, 505, 506, 507, 508, 509\}, \text{ dar } n : 11, \text{ obținem deci } n = 506.$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Notează n – numărul cărților $n = 6 \cdot c_1 + r = 7 \cdot c_2 + r = 8 \cdot c_3 + r = 9 \cdot c_4 + r, 0 \leq r \leq 5$	3p
Obține $(n - r) : [6, 7, 8, 9] = 504$	2p
$n = 504 \cdot k + r, k \in \mathbb{N}, n : 11$ și are 3 cifre $\Rightarrow r = 2 \Rightarrow n = 506$	2p

2. Aflați numerele prime a , b , c și d pentru care $23a^3 + 22b^2 + 32c + 20d = 2023$.

Soluție:

Cum $22b^2$, $32c$, $20d$ sunt numere pare, iar 2023 este impar, obținem $23a^3$ impar, deci a este impar. Pentru $a \geq 5$ relația nu este verificată, iar cum a este prim, rezultă $a = 3$.

Din $11b^2 + 16c + 10d = 701$, folosind din nou paritatea, deducem b impar.

Pentru $b \geq 11$ relația nu este verificată, iar cum b este prim, rezultă $b \in \{3, 5, 7\}$.

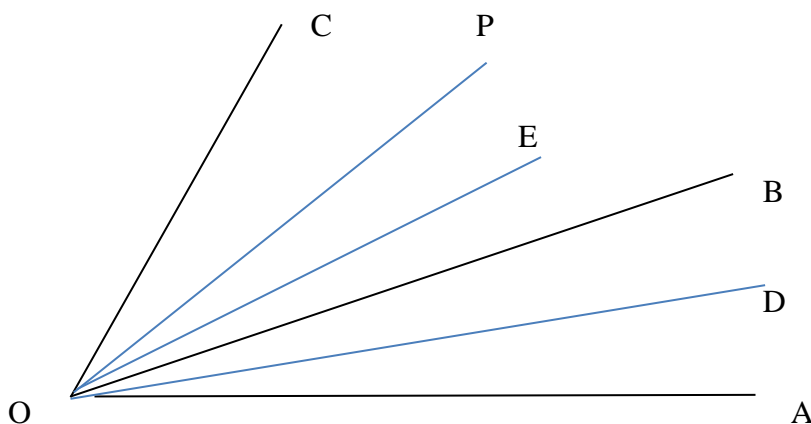
Singurele soluții sunt $b = 7, c = 2, d = 13$ și $b = 7, c = 7, d = 5$.

Obținem deci, $a = 3, b = 7, c = 2, d = 13$ și $a = 3, b = 7, c = 7, d = 5$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce a impar	1p
$a \geq 5$ nu verifică, cum a - prim, rezultă $a = 3$	2p
Obține $11b^2 + 16c + 10d = 701$, deduce b impar	1p
$b \geq 11$ nu verifică, cum b prim, obține $b \in \{3, 5, 7\}$	1p
Obține soluțiile $a = 3, b = 7, c = 2, d = 13$ și $a = 3, b = 7, c = 7, d = 5$	2p

3. Fie punctul B situat în interiorul unghiului AOC . Dacă semidreptele OD , OE și OP sunt bisectoarele unghiurilor AOB , AOC , respectiv BOC , arătați că:
- Măsura unghiului BOC este dublul măsurii unghiului EOD .
 - Măsura unghiului POE este jumătate din măsura unghiului AOB .
 - Unghiurile POE și COD au aceeași bisectoare.

Soluție:



- a) Cum $[OD]$, $[OP]$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle AOB$, respectiv $\angle BOC$, avem
 $m(\angle AOD) = m(\angle DOB) = a$ și $m(\angle BOP) = m(\angle POC) = b$. Rezultă
 $m(\angle AOC) = 2a + 2b$, $m(\angle BOC) = 2b$, $m(\angle AOB) = 2a$
 Din $[OE]$ bisectoarea $\angle AOC$, obținem că $m(\angle AOE) = a + b$.
 $m(\angle EOD) = m(\angle AOE) - m(\angle AOD) = a + b - a = b$. Rezultă $m(\angle BOC) = 2m(\angle EOD)$.
- b) Din $m(\angle AOE) = m(\angle EOC) = a + b$, obținem
 $m(\angle POE) = m(\angle EOC) - m(\angle POC) = a + b - b = a$, deci $2m(\angle POE) = m(\angle AOB)$.
- c) Fie $[OM]$ bisectoarea unghiului $\angle POE \Rightarrow m(\angle POM) = m(\angle MOE) = \frac{a}{2}$.
 $m(\angle COM) = m(\angle COP) + m(\angle POM) = b + m(\angle POM) = b + \frac{a}{2}$.
 $m(\angle MOD) = m(\angle POD) - m(\angle POM) = a + b - m(\angle POM) = a + b - \frac{a}{2} = b + \frac{a}{2}$.
 Obținem deci că $[OM]$ este și bisectoarea unghiului $\angle COD$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle DOB) = a$ și $m(\sphericalangle BOP) = m(\sphericalangle POC) = b$ $m(\sphericalangle AOC) = 2a + 2b, m(\sphericalangle BOC) = 2b, m(\sphericalangle AOB) = 2a$	1p
$m(\sphericalangle EOD) = m(\sphericalangle AOE) - m(\sphericalangle AOD) = a + b - a = b$	1p
$m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle EOD)$	1p
b) $m(\sphericalangle AOE) = m(\sphericalangle EOC) = a + b$ $m(\sphericalangle POE) = m(\sphericalangle EOC) - m(\sphericalangle POC) = a + b - b = a$	1p
$2m(\sphericalangle POE) = m(\sphericalangle AOB)$	1p
c) [OM bisectoarea unghiului $\sphericalangle POE \Rightarrow m(\sphericalangle POM) = m(\sphericalangle MOE) = \frac{a}{2}$ $m(\sphericalangle COM) = m(\sphericalangle COP) + m(\sphericalangle POM) = b + m(\sphericalangle POM) = b + \frac{a}{2}$	1p
$m(\sphericalangle MOD) = m(\sphericalangle POD) - m(\sphericalangle POM) = a + b - m(\sphericalangle POM) = a + b - \frac{a}{2} = b + \frac{a}{2}$ Obține [OM este și bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$	1p

4. Se dau punctele A, B, C și D , coliniare, în această ordine.

Știind că $BC = 3 \cdot AB$, $CD = 2 \cdot BC$, punctele M și N sunt mijloacele lui AC , respectiv AD , iar $MN = 15$ cm, aflați lungimile segmentelor AB, BC, CD .

Soluție:

Vom nota $AB = x$. Obținem $BC = 3x$, $CD = 2 \cdot 3x = 6x$.

Deoarece $AC = AB + BC = 4x$, M fiind mijlocul lui AC , rezultă $AM = AC : 2 = 2x$.

$AD = AB + BC + CD = 10x$, N fiind mijlocul lui AD , rezultă $AN = AD : 2 = 5x$.

$MN = AN - AM = 5x - 2x = 3x$, dar cum $MN = 15$ cm, rezultă $x = 5$ cm.

Obținem deci, $AB = 5$ cm, $BC = 15$ cm, $CD = 30$ cm.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Notează $AB = x$, rezultă $BC = 3x$, $CD = 2 \cdot 3x = 6x$	2p
M - mijlocul lui AC, rezultă $AM = AC : 2 = 2x$ N - mijlocul lui AD, rezultă $AN = AD : 2 = 5x$	2p
$MN = AN - AM = 5x - 2x = 3x$ $MN = 15$ cm, rezultă $x = 5$ cm	2p
Obține $AB = 5$ cm, $BC = 15$ cm, $CD = 30$ cm	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
11.02.2023

CLASA a VII -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Determinați numărul elementelor mulțimii $M = \{x \in \mathbb{Z} / |x^3| < 2023\}$.

b) Demonstrați că $\sqrt{\underbrace{111\dots1}_{15 \text{ cifre}}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soluție:

a) Din $|x^3| < 2023 \Rightarrow -2023 < x^3 < 2023$. Cum $13^3 = 2197 \Rightarrow -12^3 \leq x^3 \leq 12^3$,
 $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-12, -11, \dots, -1, 0, 1, \dots, 12\}$. Atunci $\text{card } M = 25$.

b) Suma cifrelor numărului $\underbrace{111\dots1}_{15 \text{ cifre}}$ este 15 $\Rightarrow \underbrace{111\dots1}_{15 \text{ cifre}} : 3$, dar $\underbrace{111\dots1}_{15 \text{ cifre}} \not\equiv 3^2$

$\Rightarrow \underbrace{111\dots1}_{15 \text{ cifre}}$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{\underbrace{111\dots1}_{15 \text{ cifre}}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $ x^3 < 2023, x \in \mathbb{Z}, 13^3 = 2197$	1p
$x \in \{-12, -11, \dots, -1, 0, 1, \dots, 12\}$	1p
$\text{card } M = 25$	1p
b) suma cifrelor numărului $\underbrace{111\dots1}_{15 \text{ cifre}}$ este 15	1p
$\underbrace{111\dots1}_{15 \text{ cifre}} : 3$, dar $\underbrace{111\dots1}_{15 \text{ cifre}} \not\equiv 3^2 \Rightarrow \underbrace{111\dots1}_{15 \text{ cifre}}$ nu este pătrat perfect	2p
$\sqrt{\underbrace{111\dots1}_{15 \text{ cifre}}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	1p

2. În triunghiul ascuțitunghic ABC , $\sphericalangle A = 60^\circ$, se consideră $BD \perp AC, D \in AC$, respectiv $CE \perp AB, E \in AB$ și M mijlocul laturii BC . Demonstrați că triunghiul DEM este echilateral.

Soluție:

EM, DM mediane din vârful unghiului drept $\Rightarrow EM = \frac{BC}{2} = DM$.

Fie $BD \cap CE = \{O\}$.

Dacă P, Q sunt mijloacele segmentelor $[OB], [OC]$, atunci $\triangle OEP, \triangle ODQ$ sunt echilaterale
 $\Rightarrow \triangle EOD \equiv \triangle POQ$ (L. U. L.)

$\Rightarrow ED = PQ$.

Dar PQ linie mijlocie în $\triangle OBC$

$\Rightarrow PQ = \frac{BC}{2} = ED$

$\Rightarrow EM = ED = DM = \frac{BC}{2}$

$\Rightarrow \triangle DEM$ este echilateral.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
EM, DM mediane din vârful unghiului drept, $EM = \frac{BC}{2} = DM$	2p
$BD \cap CE = \{O\}$, P, Q mijloace $[OB], [OC]$, $\triangle OEP, \triangle ODQ$ echilaterale	2p
$\triangle EOD \equiv \triangle POQ$ (L. U. L.) $\Rightarrow ED = PQ$	1p
PQ linie mijlocie $\triangle OBC \Rightarrow PQ = \frac{BC}{2} = ED$	1p
$EM = ED = DM = \frac{BC}{2} \Rightarrow \triangle DEM$ echilateral	1p

3. Fie G centrul de greutate al triunghiului oarecare ABC, E simetricul punctului G față de dreapta BC, F mijlocul segmentului AE, $\{H\} = GE \cap BC$ și D mijlocul laturii BC.

- a) Arătați că G, D, H, F sunt vârfurile unui paralelogram.
b) Calculați aria triunghiului FGE în funcție de x , unde x este aria paralelogramului de la punctul a).

Soluție:

a) FH linie mijlocie în $\triangle AEG \Rightarrow FH \parallel GA$ și $FH = \frac{GA}{2}$.

G centru de greutate al $\triangle ABC \Rightarrow GD = \frac{GA}{2}$.

$FH \parallel GD$ și $FH = GD \Rightarrow GDHF$ paralelogram.

b) $\triangle GFH \equiv \triangle HGD$ (L. L. L.)

$\Rightarrow A_{GHD} = A_{HFG} = \frac{A_{GDHF}}{2} = \frac{x}{2}$.

Dar în $\triangle FGE$: FH mediană $\Rightarrow A_{FGE} = 2 \cdot A_{HFG} = x$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) FH linie mijlocie în $\triangle AEG \Rightarrow FH \parallel GA, FH = \frac{GA}{2}$	2p
G centru de greutate al $\triangle ABC \Rightarrow GD = \frac{GA}{2}$	1p
$FH \parallel GD$ și $FH = GD \Rightarrow GDHF$ paralelogram	1p
b) $\triangle GFH \equiv \triangle HGD$ (L. L. L.) $\Rightarrow A_{GHD} = A_{HFG} = \frac{A_{GDHF}}{2} = \frac{x}{2}$	1p
$\triangle FGE$: FH mediană $\Rightarrow A_{FGE} = 2 \cdot A_{HFG} = x$	2p

4. Determinați numerele raționale pozitive x și y , știind că media lor aritmetică este

$$m_a = \sqrt{x^2 - 16y^2}, \text{ iar media lor armonică este } m_h = \frac{7}{9}.$$

Soluție:

$$\frac{x+y}{2} = \sqrt{x^2 - 16y^2} \Leftrightarrow x+y = 2\sqrt{x^2 - 16y^2} \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 4x^2 - 64y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 65y^2 + 2xy - 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 65y^2 - 13xy + 15xy - 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 13y(5y - x) + 3x(5y - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (5y - x)(13y + 3x) = 0$$

$$\text{dar } x, y > 0 \Rightarrow 13y + 3x \neq 0 \Rightarrow 5y - x = 0 \Rightarrow x = 5y.$$

$$\text{Cum } \frac{2xy}{x+y} = \frac{7}{9}, \text{ înlocuind } x = 5y, \text{ obținem}$$

$$\frac{2 \cdot 5y \cdot y}{5y + y} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \frac{10y^2}{6y} = \frac{7}{9} \Rightarrow y = \frac{7}{15}; x = \frac{7}{3}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$x + y = 2\sqrt{x^2 - 16y^2}$ $x^2 + 2xy + y^2 = 4x^2 - 64y^2$	1p
$65y^2 + 2xy - 3x^2 = 0$ $65y^2 - 13xy + 15xy - 3x^2 = 0$ $13y(5y - x) + 3x(5y - x) = 0$ $(5y - x)(13y + 3x) = 0.$	2p
$x, y > 0 \Rightarrow 13y + 3x \neq 0 \Rightarrow 5y - x = 0 \Rightarrow x = 5y$	1p
$\frac{2xy}{x+y} = \frac{7}{9}$	1p
$\frac{10y^2}{6y} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{5}{3}y = \frac{7}{9} \Rightarrow y = \frac{7}{15}$	1p
$x = 5 \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{3}$	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
11.02.2023

CLASA a VIII -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Se consideră expresia $E(x) = (x^2 - 5x + 3) \cdot (x^2 - 5x + 9) + 9$. Arătați că expresia $E(x)$ este pătrat perfect.
- b) Se consideră expresia $A(x, y) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{y^2 - 6y + 10}$, unde x și y sunt numere reale. Determinați valoarea minimă a expresiei $A(x, y)$.

Soluție:

- a) Se notează $x^2 - 5x + 3 = t \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = x^2 - 5x + 3 + 6 = t + 6$

Expresia $E(x)$ devine $t(t + 6) + 9 = t^2 + 6t + 9 = (t + 3)^2 = (x^2 - 5x + 6)^2$ - pătrat perfect

$$\begin{aligned} \text{b) } A(x, y) &= \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{y^2 - 6y + 10} = \\ &= \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 4} + \sqrt{y^2 - 6y + 9 + 1} \\ &= \sqrt{(x-3)^2 + 4} + \sqrt{(y-3)^2 + 1} \geq \sqrt{0+4} + \sqrt{0+1} = 2+1=3 \end{aligned}$$

Valoarea minimă a expresiei $A(x, y)$ este 3.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Scrierea lui $x^2 - 5x + 9 = t + 6$, unde $t = x^2 - 5x + 3$	1p
Scrierea lui $E(x)$ ca $E(t) = t^2 + 6t + 9$	1p
Scrierea lui $E(x) = (x^2 - 5x + 6)^2$ - pătrat perfect	1p
b) Scrierea lui $A(x, y) = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 4} + \sqrt{y^2 - 6y + 9 + 1}$	1p
$A(x, y) = \sqrt{(x-3)^2 + 4} + \sqrt{(y-3)^2 + 1} \geq \sqrt{0+4} + \sqrt{0+1} = 2+1=3$	2p
Valoarea minimă a lui $A(x, y)$ este 3	1p

2. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară și punctele M, N, P intersecția diagonalelor fețelor laterale $ABB'A', BCC'B',$ respectiv $ACC'A'$. Se cere:
- Demonstrați că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele și calculați raportul ariilor triunghiurilor MNP și ABC .
 - Calculați raportul dintre aria secțiunii determinată de planul (MNP) în prisma dată și aria triunghiului ABC .

Soluție:

- a) (MP) este linie mijlocie în triunghiul $A'BC$, rezultă

$$\left. \begin{array}{l} MP \parallel BC, \frac{MP}{BC} = \frac{1}{2} \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow MP \parallel (ABC) \quad (1)$$

(MN) este linie mijlocie în triunghiul $BA'C'$, rezultă

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel A'C' \parallel AC, \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2} \\ AC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (ABC) \quad (2)$$

Din (1), (2), $MN, MP \subset (MNP)$ și $MN \cap MP = \{M\}$ rezultă că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele.

(NP) este linie mijlocie în triunghiul $C'AB$, rezultă că : $\frac{MN}{AC} = \frac{NP}{AB} = \frac{MP}{BC} = \frac{1}{2}$, de unde

rezultă că triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$.

Rezultă că raportul ariilor lor este $\frac{1}{4}$.

- b) $(MNP) \parallel (ABC), (MNP) \cap (BCC') = EF, E \in (BB'), F \in (CC') \Rightarrow EF \parallel BC$

$N \in (MNP) \cap (BCC') \Rightarrow N \in EF$, deci E și F sunt mijlocele muchiilor (BB') , respectiv (CC') .

Analog $(MNP) \cap (ABB') = DE, D \in (AA') \Rightarrow DE \parallel AB, M \in (DE)$, deci D este mijlocul lui (AA') . Prin urmare $(MNP) \equiv (DEF)$.

Rezultă că secțiunea determinată de planul (MNP) în prisma $ABCA'B'C'$ este suprafața triunghiulară DEF . Triunghiurile DEF și ABC fiind congruente, rezultă că raportul ariilor lor este 1.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Arată paralelismul între două drepte concurente din planul (MNP) cu planul (ABC), folosind proprietatea liniei mijlocii și trage concluzia că planele sunt paralele	2p
Folosind proprietatea liniei mijlocii arată că rapoartele laturilor triunghiului MNP și laturilor triunghiului ABC sunt egale cu $\frac{1}{2}$	1p
Triunghiurile MNP și ABC sunt asemenea cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$, rezultă că raportul ariilor lor este $\frac{1}{4}$.	1p
b) Folosind paralelismul planelor (MNP) și (ABC), determină $D \in (AA')$, $E \in (BB')$, $F \in (CC')$ astfel încât $DE \parallel AB$, $EF \parallel BC$, deci $(MNP) \equiv (DEF)$.	1p
Secțiunea determinată de planul (MNP) în prisma $ABCA'B'C'$ este suprafața triunghiulară DEF.	1p
Triunghiurile DEF și ABC fiind congruente, rezultă că raportul ariilor lor este 1.	1p

3. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AB \perp CD$. Fie M mijlocul muchiei (BC) și N mijlocul muchiei (BD) . Pe semidreapta (DM) se alege punctul E , astfel încât $DE = 2 \cdot DM$, iar pe semidreapta (CN) se alege punctul F astfel încât $CF = 2 \cdot CN$.
- Demonstrați că punctele F , B și E sunt coliniare.
 - Demonstrați că triunghiul AEF este isoscel.

Soluție:

a) Fie N mijlocul lui (DB) și cum $CF = 2 \cdot CN$, rezultă că N este și mijlocul lui (CF) , deci patrulaterul $CDFB$ este paralelogram, de unde rezultă că $BF \parallel CD$ (1)

Analog se demonstrează că patrulaterul $CDBE$ este paralelogram, de unde rezultă că $BE \parallel CD$ (2)

Din Axioma paralelelor și relațiile (1) și (2) rezultă că dreptele BE și BF coincid, deci punctele F , B și E sunt coliniare.

b) Din $CDFB$ și $CDBE$ – paralelograme, rezultă că $BF = CD = BE$, adică B este mijlocul lui EF .

Cum $AB \perp CD$, din ipoteză și $EF \parallel CD$, rezultă $AB \perp EF$.

Deci în triunghiul AEF , (AB) este mediană și înălțime, rezultă că triunghiul AEF este isoscel.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Arată că $CDFB$ este paralelogram, de unde rezultă $BF \parallel CD$	1p
Arată că $CDBE$ este paralelogram, de unde rezultă $BE \parallel CD$	1p
Folosind Axioma paralelor argumentează că F , B , E sunt coliniare	1p
b) Arată că B este mijlocul lui (EF)	1p
Arată că $AB \perp EF$	2p
Argumentează, folosind reciprocele proprietăților triunghiului isoscel, că triunghiul AEF este isoscel	1p

4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\left[\frac{4x^2 + 3x + 14}{x^2 + 2} \right] + \left\{ \frac{3x^2 + 3x + 12}{x^2 + 2} \right\} = 6, \text{ unde } [x] \text{ reprezintă partea întreagă a lui } x, \text{ iar}$$
$$\{x\} \text{ partea fracționară a lui } x.$$

Soluție:

$$\left[\frac{4x^2 + 8 + 3x + 6}{x^2 + 2} \right] + \left\{ \frac{3x^2 + 6 + 3x + 6}{x^2 + 2} \right\} = 6$$

$$\left[\frac{4(x^2 + 2) + 3x + 6}{x^2 + 2} \right] + \left\{ \frac{3(x^2 + 2) + 3x + 6}{x^2 + 2} \right\} = 6$$

$$\left[4 + \frac{3x + 6}{x^2 + 2} \right] + \left\{ 3 + \frac{3x + 6}{x^2 + 2} \right\} = 6$$

$$4 + \left[\frac{3x + 6}{x^2 + 2} \right] + \left\{ \frac{3x + 6}{x^2 + 2} \right\} = 6 \Rightarrow \frac{3x + 6}{x^2 + 2} = 2$$

$$3x + 6 = 2(x^2 + 2) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(2x + 1) = 0$$

$$\text{Soluțiile ecuației sunt: } x_1 = 2 \text{ și } x_2 = -\frac{1}{2}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Scrie ecuația sub forma: $\left[\frac{4x^2 + 8 + 3x + 6}{x^2 + 2} \right] + \left\{ \frac{3x^2 + 6 + 3x + 6}{x^2 + 2} \right\} = 6$	1p
Scrie ecuația sub forma: $\left[\frac{4(x^2 + 2) + 3x + 6}{x^2 + 2} \right] + \left\{ \frac{3(x^2 + 2) + 3x + 6}{x^2 + 2} \right\} = 6$	1p
Scrie ecuația sub forma: $\left[4 + \frac{3x + 6}{x^2 + 2} \right] + \left\{ 3 + \frac{3x + 6}{x^2 + 2} \right\} = 6$	1p
Aplică proprietățile studiate la partea întreagă și partea fracționară și aduce ecuația la formele: $4 + \left[\frac{3x + 6}{x^2 + 2} \right] + \left\{ \frac{3x + 6}{x^2 + 2} \right\} = 6 \Rightarrow \frac{3x + 6}{x^2 + 2} = 2$	2p
Scrie ecuația de gradul al doilea $2x^2 - 3x - 2 = 0$ și descompunerea în factori $(x - 2)(2x + 1) = 0$	1p
Determină soluțiile ecuației: $x_1 = 2$ și $x_2 = -\frac{1}{2}$	1p